

1) $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere, n^k kişinin yaşadığı bir şehirde, herkesin bu şehirde yaşayan tam olarak $(n - 1)k$ tane arkadaşı vardır ve arkadaşlıklar karşılıklıdır. Telefon kullanımına yakın bir zamanda başlanacak olan bu şehirde $0, 1, \dots, n^k - 1$ sayılarının n tabanındaki yazılışları, k haneli telefon numaraları olarak, herkese tam olarak bir tane numara verilecek ve herhangi iki kişiye verilen numaralar birbirinden farklı olacak şekilde şehirde yaşayanlara dağıtılacaktır. Birisi hariç bütün basamaklardaki rakamları aynı olan iki numara için, bu numaraların verildiği kişiler birbiriyle indirimli olarak konuşabilecektir. Şehirde yaşayan insanlar arasındaki arkadaşlıklar herkesin tam olarak $(n - 1)k$ arkadaşı olmak üzere ne şekilde kurulmuş olursa olsun, telefon numaralarının insanlara herkes bütün arkadaşlarıyla indirimli konuşabilecek şekilde dağıtılabileceği tüm k pozitif tam sayılarını bulunuz.

2) Dar açılı ABC üçgeninin diklik merkezi H ve $[AB]$ kenarının orta noktası D' dir. B' den $[AC]$ ' ye inilen dik üzerinde ve ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir E noktası için, $A(ABC) + A(ABH) = 2 \cdot A(AEC)$ şartı sağlanmaktadır. BDC üçgeninin çevrel çemberinin AC doğrusuyla ikinci kesişim noktası F ise, $m(\widehat{EDF}) = 90^\circ$ olduğunu ispatlayınız.

3) p bir tek asal sayı olmak üzere, $p \mid x^2 - dy^2$, $p \nmid xy$ şartlarını sağlayan x ve y tam sayılarının bulunabilmesini sağlayan d tam sayılarına p modunda güzel sayı diyelim. p modunda güzel sayı olan bir d sayısı ve bir s tam sayısı için, $d + s$ sayısı p modunda güzel sayı değilse, d ' ye p modunda s tipi güzel sayı diyelim. $\{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$ kümesinin p modunda s tipi güzel sayı olan elemanlarının sayısını $f(p, s)$ ile gösterelim. Bütün p tek asal sayıları ve s tam sayıları için $f(p, s)$ ' yi hesaplayınız.